

40 ベクトルの基本

338

 l, k を適当な実数とする。

条件より,

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{BQ} &= \overrightarrow{BP} + k\overrightarrow{PG} \\
 &= \overrightarrow{BP} + k(\overrightarrow{BG} - \overrightarrow{BP}) \\
 &= (1-k)\overrightarrow{BP} + k\overrightarrow{BG} \\
 &= (1-k) \cdot \frac{2}{5}\vec{a} + k \cdot \frac{\vec{a} + \vec{c}}{3} \\
 &= \frac{6-k}{15}\vec{a} + \frac{k}{3}\vec{c}
 \end{aligned}$$

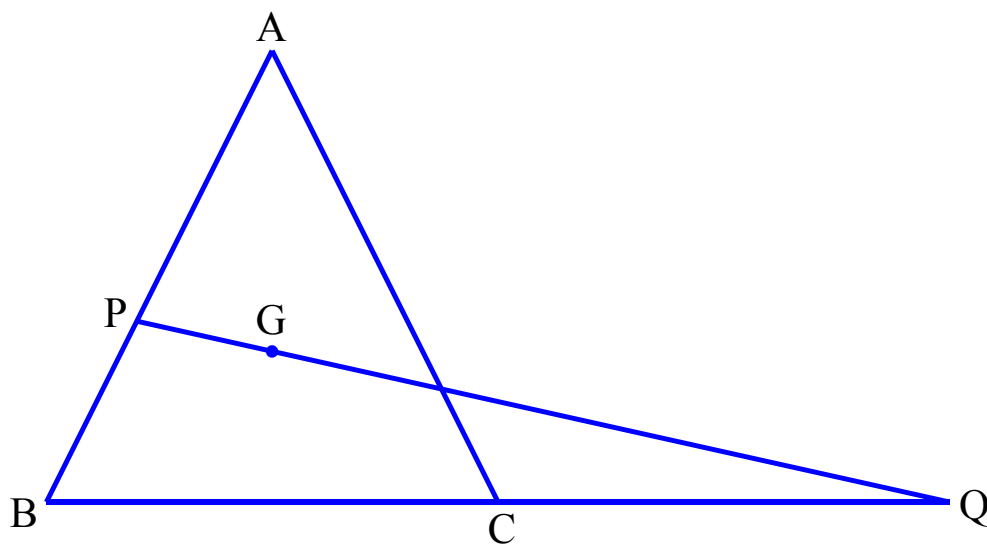
Q は直線 BC 上の点だから, $\overrightarrow{BQ} = l\vec{c}$

$$\text{よって, } \frac{6-k}{15}\vec{a} + \frac{k}{3}\vec{c} = l\vec{c} \quad \text{すなわち, } \frac{6-k}{15}\vec{a} + \frac{k-3l}{3}\vec{c} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \text{ と } \vec{c} \text{ は互いに独立だから, } \frac{6-k}{15} = 0 \text{ かつ } \frac{k-3l}{3} = 0$$

$$\text{よって, } k=6, l=2$$

$$\text{ゆえに, } \overrightarrow{BQ} = 2\vec{c}$$



339

(1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AP} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AP}\end{aligned}$$

ここで、四角形 ABCD は平行四辺形だから、 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ より、 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AP} \\ &= 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AP}\end{aligned}$$

(2)

$$\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AP}, \quad \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = r\overrightarrow{PA} \text{ より, } 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AP} = r\overrightarrow{PA}$$

$$\text{よって, } (3-r)\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AC}$$

$$r \neq 3 \text{ より, } \overrightarrow{AP} = \frac{2}{3-r}\overrightarrow{AC} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{また, } -1 \leq r \leq 1 \text{ より, } 2 \leq 3-r \leq 4 \quad \therefore \frac{1}{2} \leq \frac{2}{3-r} \leq 1$$

$$\text{ゆえに, } \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}| \leq |\overrightarrow{AP}| \leq |\overrightarrow{AC}| \quad \text{すなわち } |\overrightarrow{AQ}| \leq |\overrightarrow{AP}| \leq |\overrightarrow{AC}| \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②より、点 P は線分 QC 上の点である。

(3)

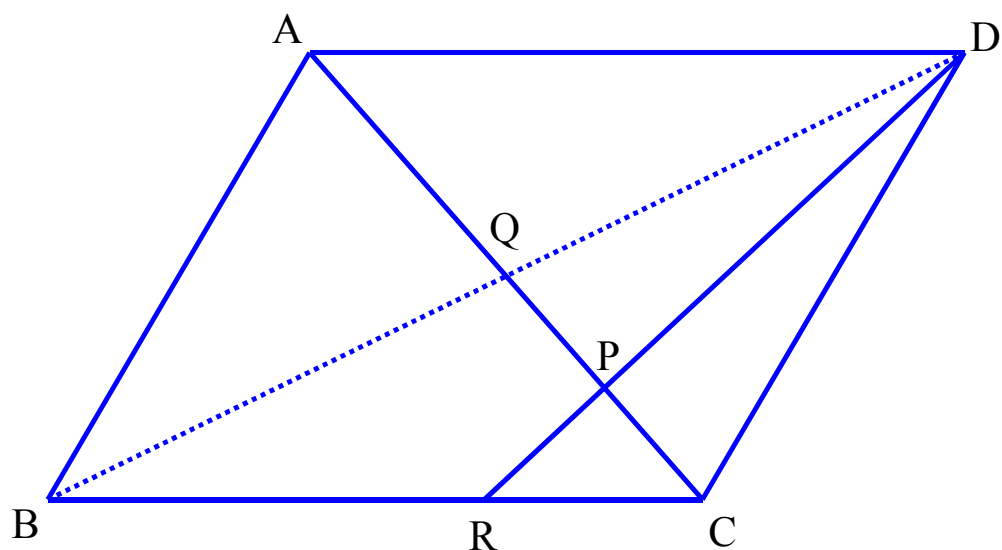
$\triangle PAD$ と $\triangle PCR$ について、 $AD \parallel RC$ だから、 $\angle PAD = \angle PCR$, $\angle PDA = \angle PRC$

よって、 $\triangle PAD \sim \triangle PCR$ $\dots \textcircled{3}$

また、 $DA : RC = BC : RC = 3 : 1$ $\dots \textcircled{4}$

$$(2) \text{より, } |\overrightarrow{AP}| = \frac{2}{3-r}|\overrightarrow{AC}| \text{ だから, } PA : PC = 2 : 1-r \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{3} \sim \textcircled{5} \text{より, } 3 : 1 = 2 : 1-r \quad \therefore 3(1-r) = 2 \quad \therefore r = \frac{1}{3}$$



340

(1)

$$\begin{aligned} 4\overrightarrow{PA} + 5\overrightarrow{PB} + 6\overrightarrow{PC} &= -4\overrightarrow{AP} + 5(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}) + 6(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) \\ &= -15\overrightarrow{AP} + 5\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

$$\text{これと, } 4\overrightarrow{PA} + 5\overrightarrow{PB} + 6\overrightarrow{PC} = \vec{0} \text{ より, } -15\overrightarrow{AP} + 5\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC} = \vec{0} \quad \therefore \overrightarrow{AP} = \frac{5\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC}}{15}$$

(2)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \frac{5\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC}}{15} \\ &= \frac{11}{15} \cdot \frac{5\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC}}{11} \end{aligned}$$

ここで, $\overrightarrow{AE} = \frac{5\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC}}{11}$ とおくと, 点 E は BC を 6 : 5 に内分する点である。

したがって, $\overrightarrow{AP} = \frac{11}{15} \cdot \overrightarrow{AE}$ より, 点 P は AE を 11 : 4 に内分する点である。

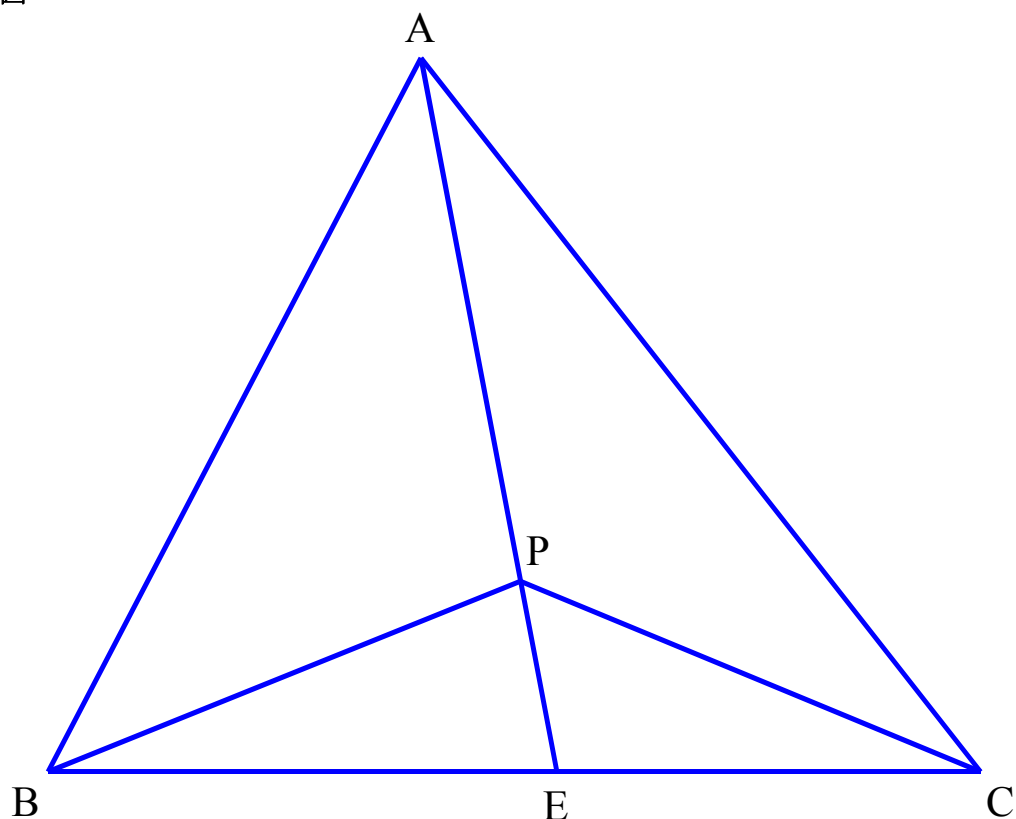
よって,

$$\Delta PAB = \frac{AP}{AE} \Delta EAB = \frac{AP}{AE} \cdot \frac{BE}{BC} \Delta ABC = \frac{11}{15} \cdot \frac{6}{11} \Delta ABC = \frac{6}{15} \Delta ABC$$

$$\Delta PBC = \frac{PE}{AE} \Delta ABC = \frac{4}{15} \Delta ABC$$

ゆえに, $\Delta PAB : \Delta PBC = 3 : 2$

参考図



$$BE : EC = 6 : 5, \quad AP : PE = 11 : 4$$

(3)

解法 1

$$\overrightarrow{AQ} \text{ を, (1) と同様にして, } \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \text{ を用いて表すと, } \overrightarrow{AQ} = \frac{5\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC} + 7\overrightarrow{AD}}{22}$$

$$\text{ここで, (1) より, } 5\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC} = 15\overrightarrow{AP}$$

$$\text{よって, } \overrightarrow{AQ} = \frac{15\overrightarrow{AP} + 7\overrightarrow{AD}}{22} \text{ より, 点 } Q \text{ は } PD \text{ を } 7 : 15 \text{ に内分する点である。}$$

ゆえに,

$$\text{四面体 } QABC = \frac{QP}{DP} \cdot \text{四面体 } ABCD = \frac{7}{22} \cdot \text{四面体 } ABCD$$

$$\text{四面体 } QBCD = \frac{QD}{PD} \cdot \text{四面体 } PBCD = \frac{15}{22} \cdot \frac{PE}{AE} \cdot \text{四面体 } ABCD = \frac{4}{22} \cdot \text{四面体 } ABCD$$

より,

$$\text{四面体 } QABC : \text{四面体 } QBCD = 7 : 4$$

解法 2

$\overrightarrow{AQ}$ を, (1)と同様にして, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ を用いて表すと, $\overrightarrow{AQ} = \frac{5\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC} + 7\overrightarrow{AD}}{22}$

ここで, (1)より, $5\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC} = 15\overrightarrow{AP}$

よって, $\overrightarrow{AQ} = \frac{15\overrightarrow{AP} + 7\overrightarrow{AD}}{22}$ より, 点 Q は PD を 7 : 15 に内分する点である。

ゆえに, 四面体 QABC = $\frac{QP}{DP}$ · 四面体 ABCD = $\frac{7}{22}$ · 四面体 ABCD ……①

一方, (2) の $\overrightarrow{AE} = \frac{5\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC}}{11}$ より, $5\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC} = 11\overrightarrow{AE}$

よって, $\overrightarrow{AQ} = \frac{11\overrightarrow{AE} + 7\overrightarrow{AD}}{22} = \frac{9}{11} \cdot \frac{11\overrightarrow{AE} + 7\overrightarrow{AD}}{18}$

ここで, $\overrightarrow{AF} = \frac{11\overrightarrow{AE} + 7\overrightarrow{AD}}{18}$ とおくと, 点 F は ED の内分点であり, $\overrightarrow{AQ} = \frac{9}{11}\overrightarrow{AF}$ より,

点 Q は AF を 9 : 2 に内分する点である。

よって,

四面体 QBCD = $\frac{QF}{AF}$ · 四面体 ABCD = $\frac{2}{11}$ · 四面体 ABCD ……②

①, ②より, 四面体 QABC : 四面体 QBCD = 7 : 4

解法 3

$\overrightarrow{AQ}$ を, (1)と同様にして, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ を用いて表すと, $\overrightarrow{AQ} = \frac{5\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC} + 7\overrightarrow{AD}}{22}$

ここで, (1)より, $5\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC} = 15\overrightarrow{AP}$

よって, $\overrightarrow{AQ} = \frac{15\overrightarrow{AP} + 7\overrightarrow{AD}}{22}$ より, 点 Q は PD を 7 : 15 に内分する点である。

ゆえに, 四面体 QABC = $\frac{QP}{DP}$ · 四面体 ABCD = $\frac{7}{22}$ · 四面体 ABCD ……①

直線 AQ と ED の交点を F とすると, $\triangle AEF$ と P, Q, D について, メネラウスの定理により,

$$\frac{AP}{PE} \cdot \frac{ED}{DF} \cdot \frac{FQ}{QA} = 1$$

よって, $\frac{FQ}{QA} = \frac{PE}{AP} \cdot \frac{DF}{ED} = \frac{4}{11} \cdot \frac{11}{18} = \frac{2}{9}$ より, 点 Q は AF を 9 : 2 に内分する点である。

ゆえに, 四面体 QBCD = $\frac{QF}{AF}$ · 四面体 ABCD = $\frac{2}{11}$ · 四面体 ABCD ……②

①, ②より, 四面体 QABC : 四面体 QBCD = 7 : 4

341

$\overrightarrow{OS}=\vec{s}$, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とすると,
 $\vec{s}$ は適当な実数 k, l を用いて,

$$\begin{aligned}\vec{s} &= \overrightarrow{OP} + k\overrightarrow{PQ} + l\overrightarrow{PR} \\ &= (1-k-l)\overrightarrow{OP} + k\overrightarrow{OQ} + l\overrightarrow{OR} \\ &= (1-k-l) \cdot \frac{2}{3}\vec{a} + k \cdot \frac{3}{4}\vec{b} + l\left(\frac{1}{5}\vec{b} + \frac{4}{5}\vec{c}\right) \\ &= \frac{2}{3}(1-k-l)\vec{a} + \left(\frac{3}{4}k + \frac{1}{5}l\right)\vec{b} + \frac{4}{5}l\vec{c}\end{aligned}$$

と表せる。

これと、点 S は線分 AC の内分点であることから,

$$\frac{2}{3}(1-k-l) + \frac{4}{5}l = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

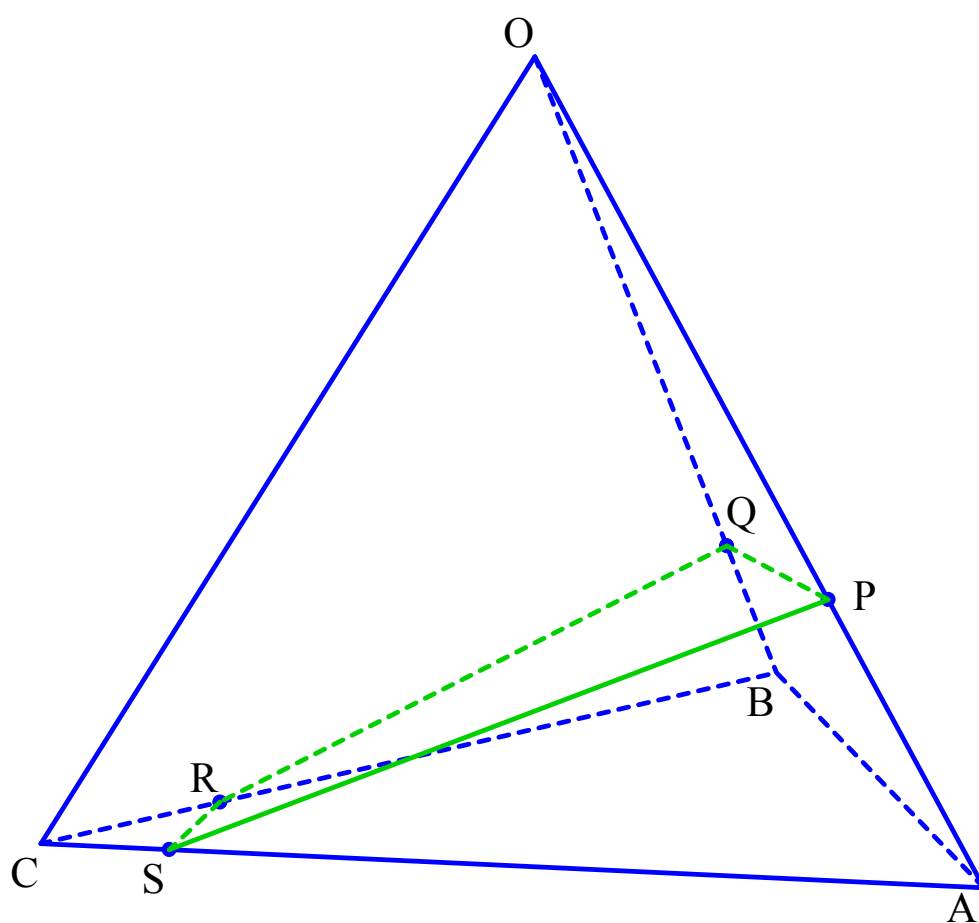
$$\frac{3}{4}k + \frac{1}{5}l = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

①と②の連立方程式を解くと、 $k = -\frac{2}{7}$, $l = \frac{15}{14}$

よって,

$$\begin{aligned}\vec{s} &= \frac{2}{3}(1-k-l)\vec{a} + \left(\frac{3}{4}k + \frac{1}{5}l\right)\vec{b} + \frac{4}{5}l\vec{c} \\ &= \frac{\vec{a} + 6\vec{c}}{7}\end{aligned}$$

ゆえに、 $AS : SC = 6 : 1$



342

(1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} \\ &= \left(\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5} \overrightarrow{OB} \right) - \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \\ &= \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{2}{5} \vec{b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ML} &= \overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OM} \\ &= \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{OC} \right) - \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \\ &= \frac{1}{2} \vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{3} \vec{c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MK} &= \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OM} \\ &= k \overrightarrow{OC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \\ &= -\frac{1}{2} \vec{a} + k \vec{c}\end{aligned}$$

補足：ベクトルを継ぎ足していくと楽，内分の公式を使うのは面倒

(2)

$\overrightarrow{MN}$ と $\overrightarrow{MK}$ は互いに独立だから， $\overrightarrow{ML}$ は適当な実数 s, t を用いて，

$\overrightarrow{ML} = s \overrightarrow{MN} + t \overrightarrow{MK}$ と表せる。

ここで，左辺と右辺を，それぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表すと，

(1)より，それぞれ

$$\overrightarrow{ML} = \frac{1}{2} \vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{3} \vec{c}$$

$$\begin{aligned}s \overrightarrow{MN} + t \overrightarrow{MK} &= s \left(\frac{1}{2} \vec{a} + \frac{2}{5} \vec{b} \right) + t \left(-\frac{1}{2} \vec{a} + k \vec{c} \right) \\ &= \frac{s-t}{2} \vec{a} + \frac{2s}{5} \vec{b} + kt \vec{c}\end{aligned}$$

$$\text{よって，} \frac{1}{2} \vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{3} \vec{c} = \frac{s-t}{2} \vec{a} + \frac{2s}{5} \vec{b} + kt \vec{c}$$

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ は互いに独立だから，} \frac{s-t}{2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{2s}{5} = 1, \quad kt = \frac{1}{3}$$

$$\text{この連立方程式を解くことにより，} k = \frac{2}{9}$$

(3)

平面と辺 GF の交点を P とすると、 $0 \leq m \leq 1$ を満たす実数 m を用いて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FP} \\ &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + m\overrightarrow{FG} \\ &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + m\overrightarrow{OA} \\ &= m\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\end{aligned}$$

と表せる。

また、 $\overrightarrow{OP}$ は適当な実数 u, v を用いて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OM} + u\overrightarrow{MN} + v\overrightarrow{MK} \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + u\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}\right) + v\left(-\frac{1}{2}\vec{a} + k\vec{c}\right) \\ &= \frac{1+u-v}{2}\vec{a} + \frac{2}{5}u + kv\vec{c}\end{aligned}$$

とも表せる。

$$\text{よって、 } m\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \frac{1+u-v}{2}\vec{a} + \frac{2}{5}u + kv\vec{c}$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は互いに独立だから、

$$m = \frac{1+u-v}{2} \quad \dots \textcircled{1} \quad 1 = \frac{2}{5}u \quad \dots \textcircled{2} \quad 1 = kv \quad \dots \textcircled{3}$$

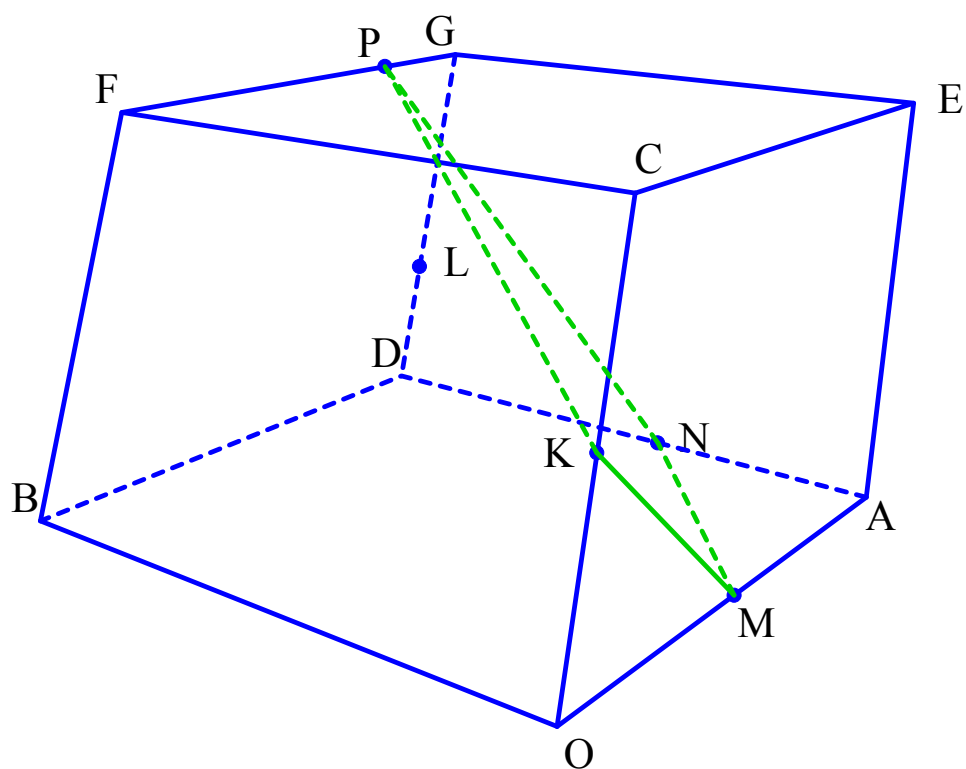
$$\textcircled{2} \text{ より、 } u = \frac{5}{2} \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} \text{ および } 0 < k < 1 \text{ より、 } v = \frac{1}{k} \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4}, \textcircled{5} \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入すると、 } m = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5}{2} - \frac{1}{k}\right) \text{ より、 } k = \frac{2}{7-4m}$$

$$\text{これと、 } 0 \leq m \leq 1 \text{ より、 } \frac{2}{7} \leq k \leq \frac{2}{3}$$

参考図



343

P, Q, R, S が同一平面上にあるならば, 適当な実数 α, β を用いて,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OP} + \alpha \overrightarrow{PQ} + \beta \overrightarrow{PS} \\ &= (1 - \alpha - \beta) \overrightarrow{OP} + \alpha \overrightarrow{OQ} + \beta \overrightarrow{OS}\end{aligned}$$

と表せる。

よって, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$ とおくと,

$$r\vec{c} = (1 - \alpha - \beta)p\vec{a} + \alpha q\vec{b} + \beta s\vec{d} \quad \cdots \textcircled{1}$$

また, 条件より $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$ だから, $r\vec{c} = -r\vec{a} + r\vec{b} + r\vec{d} \quad \cdots \textcircled{2}$

よって, ①, ②より, $-r\vec{a} + r\vec{b} + r\vec{d} = (1 - \alpha - \beta)p\vec{a} + \alpha q\vec{b} + \beta s\vec{d}$

これと, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ が互いに独立であることおよび p, q, r, s が 0 でないことから,

$$-r = (1 - \alpha - \beta)p \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$r = \alpha q \quad \therefore \alpha = \frac{r}{q} \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$r = \beta s \quad \therefore \beta = \frac{r}{s} \quad \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4} \text{と} \textcircled{5} \text{を} \textcircled{3} \text{に代入すると, } -r = \left(1 - \frac{r}{q} - \frac{r}{s}\right)p \text{ より, } p + r = pr \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{s}\right) \quad \therefore \frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{s}$$